

LOS MODELOS REOLÓGICOS

Tomás Castrillón Oberndorfer
Ingeniero civil
tomascastrillon@hotmail.com

Resumen: En el análisis estructural, los algoritmos de cálculo exigen una idealización del comportamiento de los diversos elementos constitutivos de una obra de infraestructura. Con frecuencia, dichos elementos presentan un comportamiento viscoelástico, o sea que no cumplen con las condiciones impuestas por la elasticidad lineal. La reología es la rama de la Física que estudia el modo en que los materiales se deforman o fluyen en respuesta a fuerzas o tensiones aplicadas. Para los estudios analíticos, es necesaria entonces, la elaboración de modelos que se ajusten, de la mejor manera posible, a dicho comportamiento, utilizando, para el efecto, elementos, cuyo comportamiento es bien conocido como los que brinda el análisis dinámico elemental.

Palabras clave: Retracción, Encogimiento, Flujo Plástico, Modelos Analíticos. Viscoelasticidad.

1.- INTRODUCCIÓN

En la construcción de infraestructura, muchos materiales utilizados, como el concreto, Figura 1a, al ser sometidos a una carga permanente, muestran una deformación instantánea elástica, seguida por una deformación dependiente del tiempo denominada flujo con la forma típica mostrada en la Figura. 1.

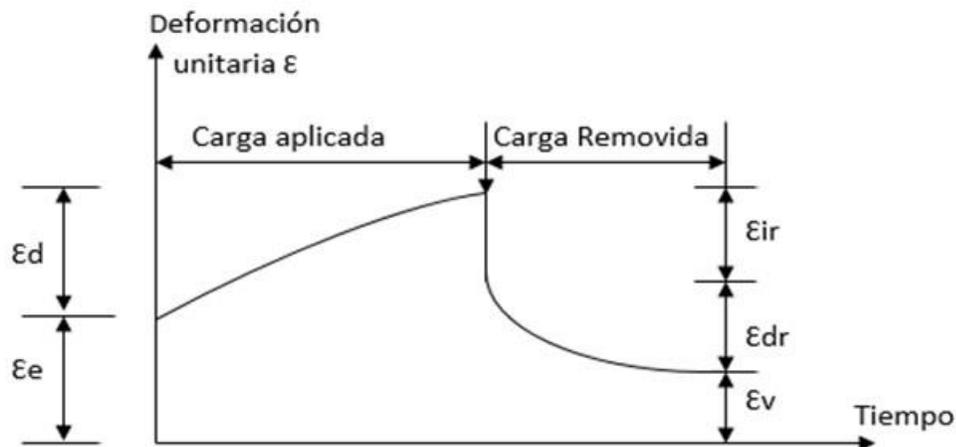


Figura 1a

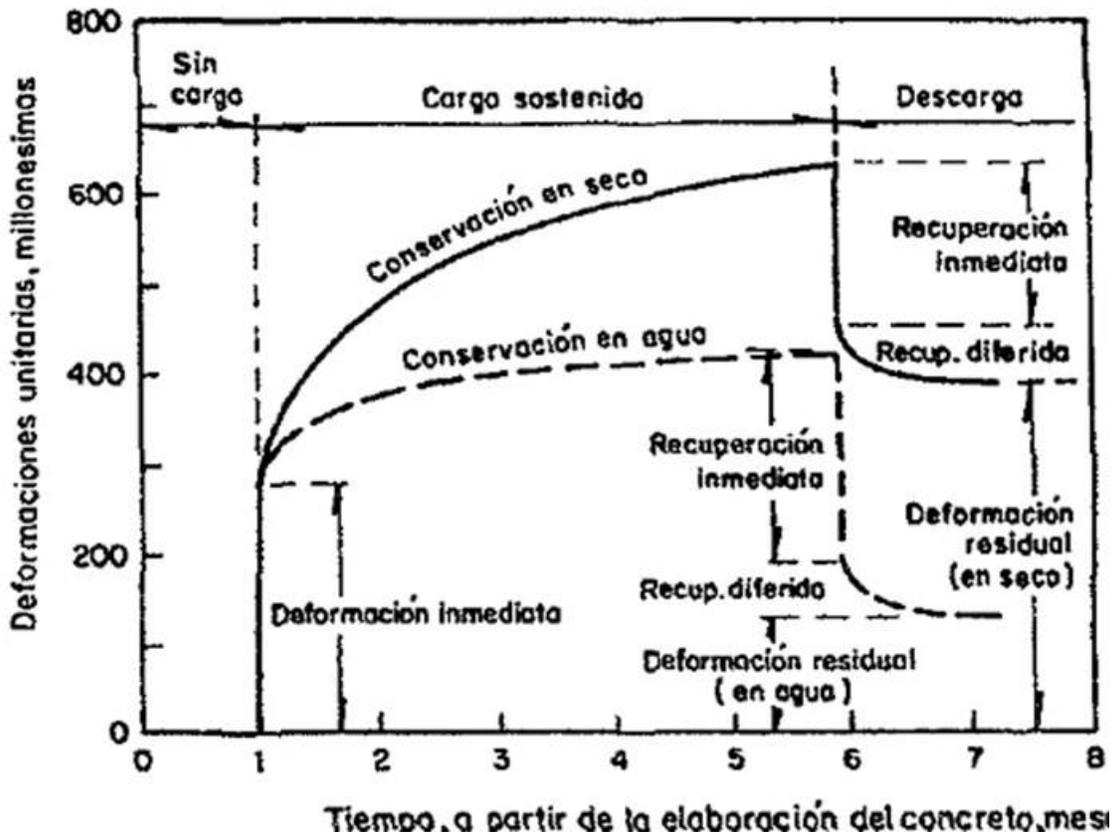


Figura 1b

Figura 1 Comportamiento de un material viscoelástico

Fuente. Las figuras en este artículo han sido organizadas por el autor extraídas de las referencias listadas al final

En síntesis, en la Figura 1 se presenta una curva típica deformación – tiempo, para un material viscoelástico. Cuando se aplica una carga, se presenta una deformación instantánea, ϵ_e , denominada deformación elástica.

Si la carga permanece, aumenta la deformación con el tiempo y pasa de ϵ_e a ϵ_d siendo ϵ_t la deformación total conformada así:

$$\epsilon_t = \epsilon_e + \epsilon_d \quad (1)$$

En donde ϵ_d es la deformación diferida o flujo plástico.

Si la carga se retira, se presenta una recuperación instantánea ϵ_{ir} , seguida de una recuperación diferida ϵ_{dr} quedando, al final, una deformación permanente llamada deformación viscosa ϵ_v , no recuperable.

Se tiene entonces:

$$\epsilon_t = \epsilon_{ir} + \epsilon_{dr} + \epsilon_v \quad (2)$$

Aunque lo más común es que la recuperación instantánea ϵ_{ir} , sea menor que la deformación elástica ϵ_e , o sea $\epsilon_{ir} < \epsilon_e$, se asume, con frecuencia, que son iguales y entonces, igualando las ecuaciones 1 y 2, se obtiene:

$$\epsilon_t = \epsilon_e + \epsilon_d = \epsilon_{ir} + \epsilon_{dr} + \epsilon_v$$

Poniendo entonces $\epsilon_{ir} = \epsilon_e$

queda:

$$\epsilon_d = \epsilon_{dr} + \epsilon_v \quad (3)$$

2.- LA LEY DE NEWTON PARA FLUJOS VISCOSOS

Se considera que para los sólidos la resistencia al corte depende de la relación tensión-deformación correspondiente: $\tau \sim \gamma$.

Para los fluidos, se tiene también para el corte, la relación $\tau \sim \frac{dv}{dt}$, proporcional a la variación de la velocidad.

La propiedad de los fluidos para resistir la deformación por corte es la viscosidad.

En la Figura 2, se ilustra un movimiento laminar, o sea, un flujo paralelo de un fluido, en donde todas las partículas se mueven en la misma dirección, pero las diferentes capas, o niveles, tienen diferentes velocidades $u(y)$, Figura 2b .

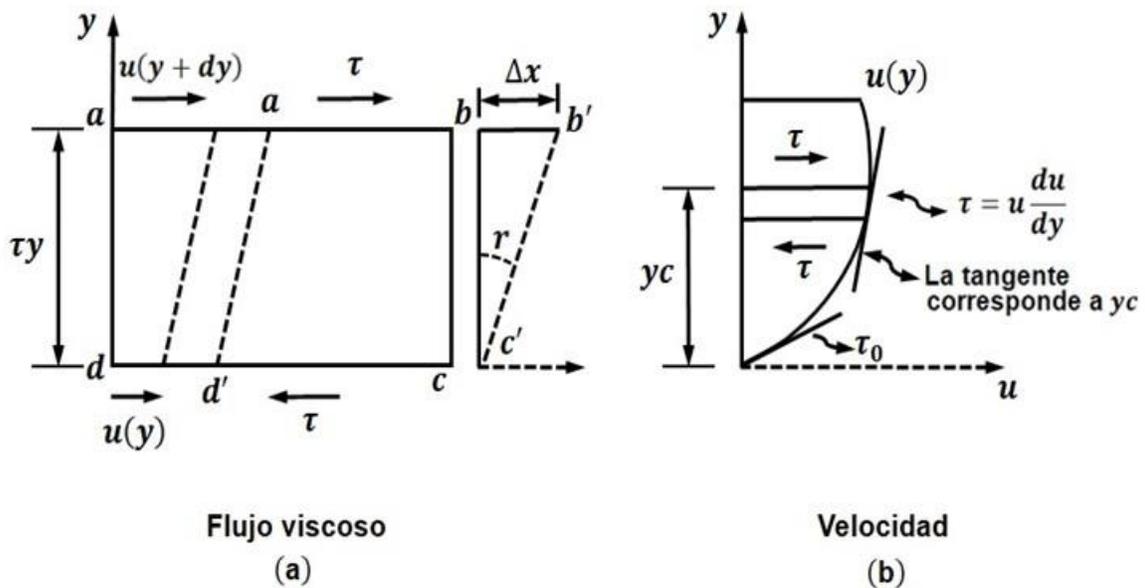


Figura 2 Movimiento laminar

Luego de un lapso pequeño Δt , el rectángulo a, b, c, d Figura 2(a), se transforma en a', b', c', d'. Si la velocidad es función de y, u(y), Figura 2(b), se tiene:

$$\overline{aa'} = \overline{bb'} = u(y + \delta y) \Delta t$$

$$\overline{cc'} = \overline{dd'} = u(y) \Delta t$$

Se define como deformación unitaria por corte, a:

$$\gamma = \frac{\Delta X}{\delta y} = \frac{u(y + \delta y)\Delta t - u(y)\Delta t}{\delta y} \quad (4)$$

Para valores “pequeños” de Δt , puede ponerse la deformación unitaria en función de su variación.

$$\gamma = \frac{dy}{dt} \Delta t \quad (5)$$

Y entonces, igualando las ecuaciones 4 y 5, se obtiene:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{u(y + \delta y) - u(y)}{\delta y} \quad (6)$$

Luego, para “pequeños” valores de δy , se obtiene:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (7)$$

Ahora bien, la Ley de la Viscosidad de Newton, establece que la tensión de corte es proporcional a la rata de variación de la deformación, o sea:

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{du}{dy} \quad (8)$$

Siendo μ la Viscosidad Dinámica.

En la Figura 2-b, se muestra la variación de la velocidad, u(y). Para y=0, (superficie fija) sin deslizamiento, se tiene

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0}$$

Para un plano c, dado por y_c, Figura 2(b) se tienen las correspondientes fuerzas de corte actuantes. Para la superficie y=0 la fuerza debida a τ , que se considera uniforme, está dada por:

$$F_r = A\mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$

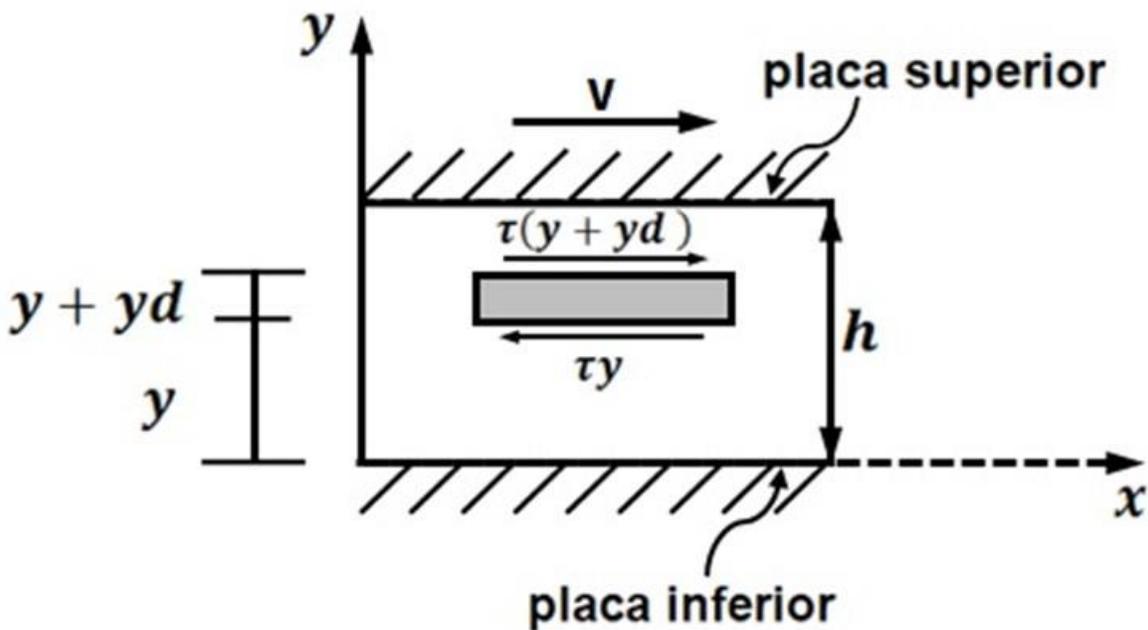
Siendo A un área específica de aplicación.

3.- EL FLUJO EN MEDIO DE 2 PLACAS PARALELAS.

Es interesante analizar el caso presentado en la Figura 3

Se tienen 2 placas paralelas separadas por una distancia h . Dicho espacio está ocupado por un fluido viscoso. La placa superior se desplaza con una velocidad V , mientras la placa inferior está fija.

Las interfases entre las placas y el fluido tienen las velocidades respectivas: Cero para la placa inferior y V para la superior.



Flujo entre 2 placas paralelas

Figura 3 Flujo entre dos placas paralelas

Para una h “pequeña”, se considera el flujo laminar y su velocidad no depende de x , ó sea, que se tiene: $u=u(y)$.

Considerando el elemento mostrado con las ordenadas $(y + dy)$, (y) , se tienen las tensiones de corte, dadas por $\tau(y + dy)$ y $\tau(y)$ y, además, si “ A ” es el área, la fuerza resultante sobre el elemento está dada por:

$$F= A [\tau (y + dy) - \tau(y)]$$

Para un flujo laminar estable, esta fuerza es nula, ó sea: τ es constante. Entonces según la ley de Newton.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \text{Constante}$$

Y también:

$$\frac{du}{dy} = C1$$

Integrando esta ecuación, se obtiene: $u = C1y + C2$. Las constantes se determinan utilizando las condiciones de borde $u(0) = 0$ y $u(h) = V$

De la primera condición.

$$0 = 0 + C2 \quad \therefore \quad C2 = 0$$

De la segunda condición $V = C1h \quad \therefore \quad C1 = \frac{V}{h}$

Y el “perfil” de la velocidad es:

$$u(y) = \frac{Vy}{h}$$

Distribución lineal y además, según la ecuación 8.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{V}{h} \quad (9)$$

Si el área de la placa superior es A la fuerza para moverla es.

$$F = \mu \frac{du}{dy} * A = \frac{A * \mu * V}{h}$$

Volviendo al volumen dado por a' , b' , c' , d' , Figura 4.

El plano dado por los puntos b y d , en contacto con la placa superior, se desplaza con la velocidad V . Se define un cambio de forma debida a la velocidad V , dado por la relación.

$$\epsilon_v = \frac{V \Delta t}{h} \quad (\text{Subíndice } v \text{ por viscoso})$$

La rata de cambio de ϵ con el tiempo es $\dot{\epsilon}$:

$$\dot{\epsilon} = \frac{V}{h}$$

De donde:

De donde:

$$\tau = \mu \dot{\epsilon}$$

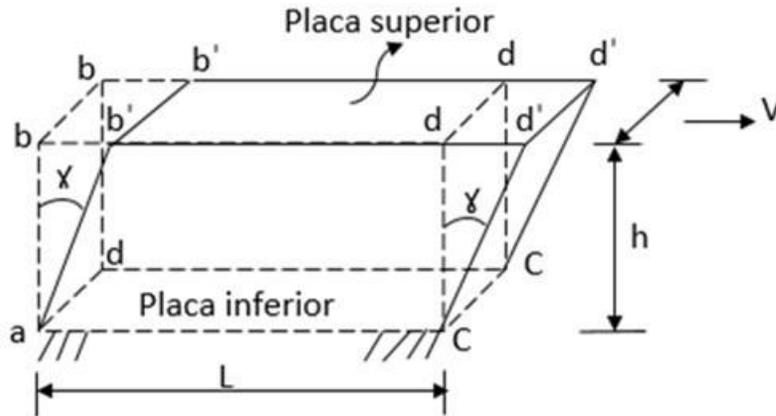


Figura 4. Deformación viscosa

Entonces, puede establecerse una relación Tensión- Deformación correspondiente, así:

$$\sigma_v = \lambda \dot{\epsilon}_v = \lambda \frac{d\epsilon_v}{dt} \tag{10}$$

Expresión que se considera conjuntamente con la relación:

$$\sigma_e = E \epsilon_e \text{ (Subíndice } e \text{ de elástico)} \tag{11}$$

que define el Módulo de Elasticidad.

4.- LOS MODELOS MATEMATICOS.

Recordando el Análisis Dinámico elemental, en donde se considera la fuerza elástica kx , proporcional a la deformación, y el amortiguamiento, proporcional a la velocidad, cx , la combinación de los modelos dinámicos se utiliza para plantear los modelos matemáticos que simulen el comportamiento de los materiales viscoelásticos.

Los elementos principales utilizados en estos modelos son: un resorte con módulo de elasticidad E y un amortiguador que representa el comportamiento viscoso, y se le asigna un coeficiente de fricción λ relacionado con el coeficiente de viscosidad μ medido en el laboratorio. En lugar de utilizar fuerza P y deformación correspondiente, x , se usan la tensión sigma, σ , y la deformación unitaria, ϵ .

Puede demostrarse, según Lenczner (ver referencias), que $\lambda = 3\mu$

4-1 EL MODELO DE MAXWELL

El modelo de Maxwell, conecta en serie los elementos elástico y viscoso como se ilustra en la Figura 5.

Se tiene entonces que la deformación unitaria es:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_v \quad (12)$$

Sustituyendo:

$$\epsilon = \frac{\sigma_e}{E} + \frac{\sigma v}{\lambda} \int_0^t dt$$

En este modelo se tiene, además, que: $\sigma_e = \sigma_v = \sigma$ (13)

Luego: $\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma t}{\lambda}$ (14)

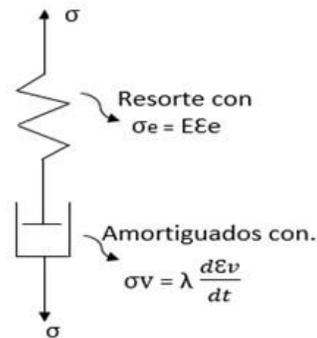
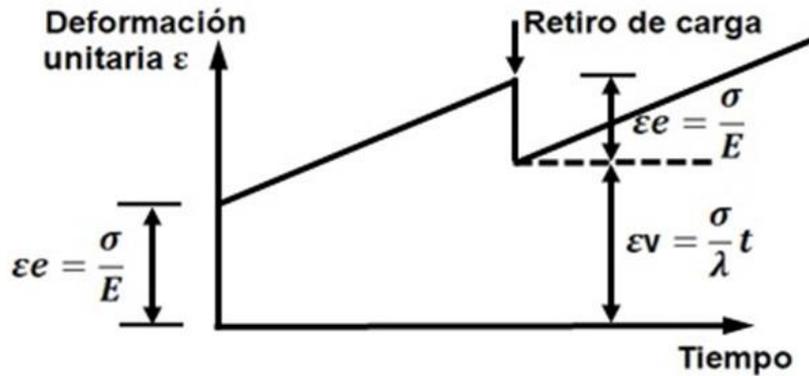


Figura 5 Modelo de Maxwell



Representación gráfica del modelo de Maxwell

Figura 6

4-2 EL MODELO DE KELVIN

Conectando el “resorte” y el “amortiguador” en paralelo se obtiene el modelo de Kelvin Figura 7.

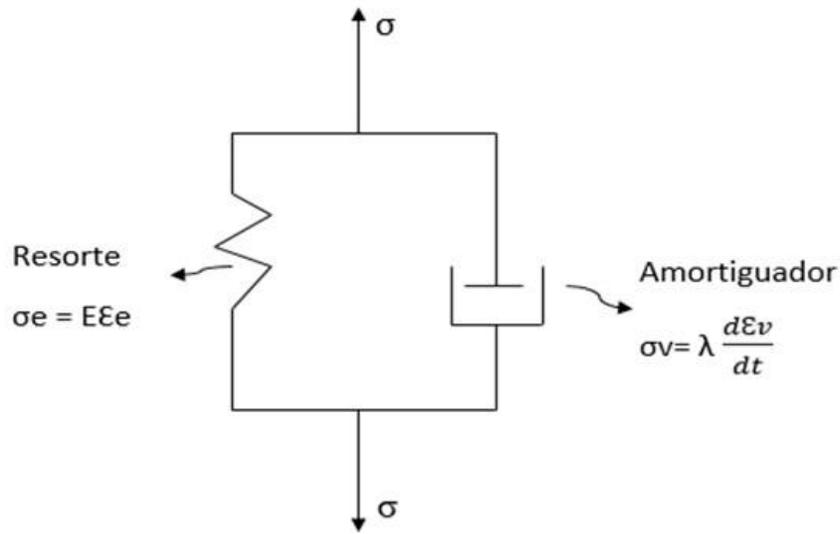


Figura 7 Modelo de Kelvin

Se tiene además:

$$\epsilon = \epsilon_e = \epsilon_v \tag{15}$$

Y también:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \tag{16}$$

Reemplazando:

$$\sigma = E\epsilon + \lambda \frac{d\epsilon}{dt}$$

Y, si se separan las variables queda:

$$\frac{dt}{\lambda} = \frac{d\epsilon}{\sigma - E\epsilon}$$

Integrando:

$$-\frac{1}{E} \ln \frac{\sigma - E\epsilon}{\sigma} = \frac{t}{\lambda}$$

Siendo ln = logaritmo neperiano.

Reagrupando.

$$\ln \frac{\sigma - E\epsilon}{\sigma} = -\frac{Et}{\lambda}$$

Recordando la definición de logaritmo neperiano, ln.

$$\Sigma e^{-\frac{Et}{\lambda}} = \sigma - E\epsilon$$

$$\therefore \epsilon = \frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma}{E} e^{-\frac{Et}{\lambda}}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 - e^{-\frac{Et}{\lambda}} \right] \tag{17}$$

Relación representada gráficamente en la Figura 8.

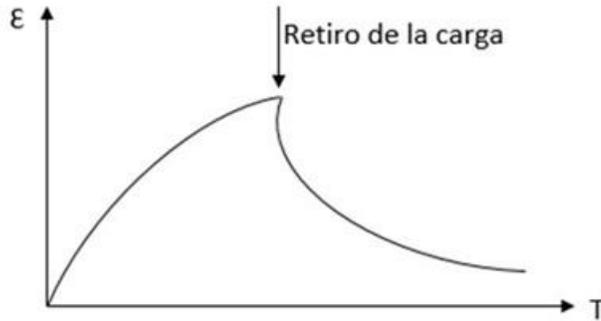
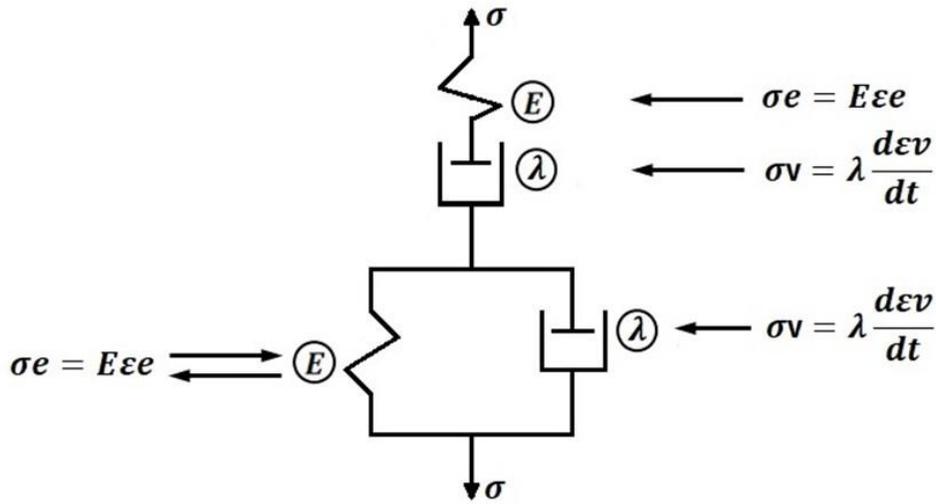


Figura 8 Modelo de Kelvin – Representación gráfica

Se ve, fácilmente, que los modelos de Maxwell y Kelvin difieren mucho de la forma gráfica mostrada en la Figura 1; se analiza, entonces, el modelo de Burger que combina los 2 modelos como se ilustra en la Figura 9.



Modelo de Burger

Figura 9

4-3 EL MODELO DE BURGER

Se obtiene combinando los modelos de Maxwell y Kelvin.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma t}{\lambda} + \frac{\sigma}{E} \left[1 - e^{-\left(\frac{Et}{\lambda}\right)} \right] \\ \epsilon &= \frac{\sigma}{E} \left[2 + \frac{E}{\lambda} t - e^{-\left(\frac{Et}{\lambda}\right)} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Representando gráficamente en la Figura 10. Se ve que tiene relativamente una buena semejanza con el esquema mostrado en la Figura 1.

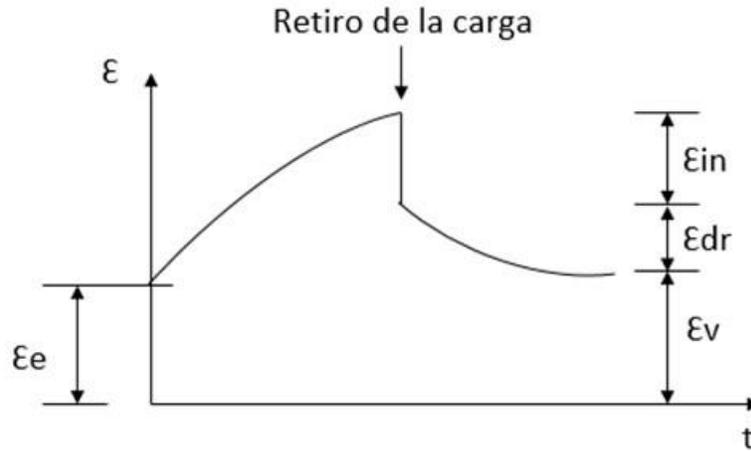


Figura 10 Modelo de Burger. Diagrama ϵ vs t

Se ha asumido que la recuperación instantánea es igual a la elástica $\epsilon_e = \epsilon_o$. Se observa que para $t = 0$.

$$\begin{aligned} \epsilon_o &= \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\lambda} t + \frac{\sigma}{E} \left[1 - \frac{1}{e^{\frac{Et}{\lambda}}} \right] \\ &= \frac{\sigma}{E} + 0 + 0 = \epsilon_e \end{aligned}$$

También por hipótesis $\epsilon_e = \epsilon_v$.

Donde:

ϵ_{ir} = Recuperación instantánea.

ϵ_{dr} = Recuperación diferida.

ϵ_v = Deformación viscosa remanente, no recuperable.

5.- CONSIDERACIÓN DEL FLUJO EN LA FLEXIÓN

En la Teoría Elemental de la Flexión en Vigas, considerando un elemento diferencial de viga, dx , con sección constante, sometido a un momento flector M , con la suposición de que las secciones planas, normales al eje longitudinal, permanecen planas, se demuestra de acuerdo a lo mostrado en las figuras 11 y 12, que:

$$\epsilon = \frac{Y}{R}$$

Siendo: Y la distancia al eje neutro.

ϵ = Deformación unitaria a una distancia y del eje neutro Figura 12(b).

R = Radio de curvatura de la viga deformada Figura 12(a).

Además, la ecuación diferencial de la curva o deformada elástica, figura 11 es:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y_m}{dx^2} \tag{19}$$

Siendo y_m = La deflexión de la viga.

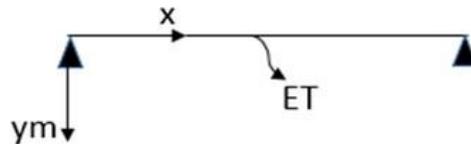


Figura 11 Flexión en vigas

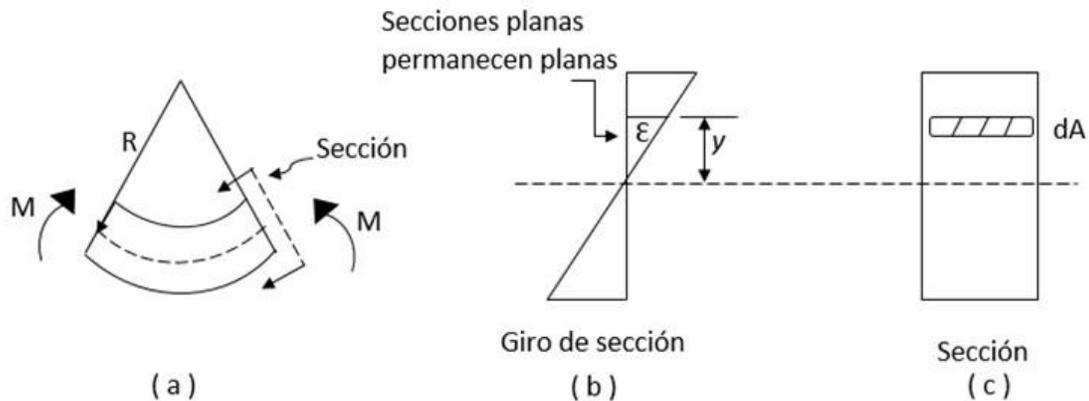


Figura 12 Relación de ϵ con y debida a M

5-1 EL MODELO DE MAXWELL

Se tiene: $y_m = y_e + y_v$ (20)

y_e = Componente elástica de la deflexión

y_v = Componente viscosa de la deflexión

Además:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_v \tag{12}$$

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \tag{13}$$

Si R es igual al radio de curvatura, también se tiene:
 Re = Radio de curvatura asociado con la deflexión elástica.
 Rv = Radio de curvatura asociado con la deflexión viscosa.
 Entonces:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{d^2 y_e}{dx^2}$$

$$\frac{1}{R_v} = \frac{d^2 y_v}{dx^2}$$

Considerando la ecuación 18, o sea: $\epsilon = \frac{y}{r}$ (Los puntos superiores indican derivadas respecto al tiempo).

$$\epsilon_e = y \frac{d^2 y_e}{dx^2} \longrightarrow \dot{\epsilon}_e = y \frac{\partial^2 \dot{y}_e}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_v = y \frac{d^2 y_v}{dx^2} \longrightarrow \dot{\epsilon}_v = y \frac{\partial^2 \dot{y}_v}{\partial x^2}$$

Se utilizan Derivadas Parciales porque las flechas también dependen del tiempo

Derivando también respecto al tiempo: $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$

De la (12): $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_v \tag{21}$

De la (11): $\epsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{\sigma}{E}$

Y $\dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$

De la 10: $\dot{\epsilon}_v = \frac{\sigma_v}{\lambda} = \frac{\sigma}{\lambda}$ para la componente viscosa y según la ecuación (21):

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{\lambda} = y \frac{\partial^2 \dot{y}_e}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \dot{y}_v}{\partial x^2}$$

De donde teniendo en cuenta la ecuación (20):

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda} = y \frac{\partial^2 \dot{y}_m}{\partial x^2} \tag{22}$$

Multiplicando ambos lados por $y dA$, siendo dA un elemento diferencial de área, Figura 12 (c), e integrando para y .

$$\frac{1}{E} \int \dot{\sigma} \cdot y dA + \frac{1}{\lambda} \int \sigma \cdot y dA = \frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2} \int y^2 dA \tag{23}$$

Notando que y_m depende solo de x Figura 11 y considerando, además, que el diferencial de fuerza interna es $df = \sigma dA$ y, por lo tanto, el diferencial de momento respecto al eje neutro de esta fuerza es $dM = ydf \therefore dM = \sigma y dA$.

$$\int \sigma \cdot y dA = M \quad y \quad \int \dot{\sigma} \cdot y dA = \dot{M} \tag{24}$$

Además:

$$\int y^2 dA = I \quad \text{Momento de inercia del área de la sección transversal.}$$

Llevando las ecuaciones (24) a la ecuación (23)

$$\frac{\dot{M}}{E} + \frac{M}{\lambda} = I \frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2}$$

$$\text{ó} \quad \dot{M} + \frac{E}{\lambda} M = EI \frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2} \tag{25}$$

Ecuación diferencial de una viga viscoelástica utilizando el modelo de Maxwell. Integrando primero respecto al tiempo.

$$EI \frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2} = \int \frac{dM}{dt} dt + \frac{E}{\lambda} \int_0^t M dt = M + \frac{E}{\lambda} \int_0^t M dt \tag{26}$$

Integrando dos veces respecto a x .

$$EI y_m = \iint M dx dx + \frac{E}{\lambda} \iint \left(\int_0^t M dt \right) dx dx \tag{27}$$

Para una carga constante, M no depende del tiempo.

$$\text{Luego: } \int M dt = M \cdot t$$

$$Y \quad EI y_m = \iint M dx dx + \frac{E}{\lambda} t \iint M dx dx$$

Recordando la ecuación diferencial de la elástica en vigas:

$$EI = \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad \therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Integrando 2 veces:

$$\iint M dx dx = EI y_i$$

Siendo y_i = Deflexión elástica instantánea

De donde, teniendo en cuenta la ecuación 27

$$y_m = y_i + \frac{E}{\lambda} t y_i$$

$$y_m = y_i \left(1 + \frac{E}{\lambda} t\right)$$

Ecuación de la deflexión viscoelástica diferida utilizando el modelo de Maxwell.

5-2 EL MODELO DE KELVIN

Como se ha visto, se tiene, por hipótesis:

$$y_k = y_e = y_v \quad k \text{ de Kelvin}$$

y_k es la flecha en un punto, además:

$$\epsilon = \epsilon_e = \epsilon_v \tag{14}$$

$$Y \quad \sigma = \sigma_e + \sigma_v \tag{15}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 19:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{d^2 y_e}{dx^2}$$

$$\frac{1}{R_v} = \frac{d^2 y_v}{dx^2}$$

Además

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_e &= y \frac{d^2 y_e}{dx^2} \longrightarrow y \frac{d^2 y_k}{dx^2} \\ \epsilon_v &= y \frac{d^2 y_v}{dx^2} \longrightarrow y \frac{d^2 y_k}{dx^2} \end{aligned} \right\} \text{ Por ser } y_k = y_e = y_v$$

También según la ecuación (11) $\epsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} \therefore \sigma_e = E\epsilon_e$

Y según la ecuación (10);

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\sigma_v}{\lambda} \therefore \sigma_v = \lambda \dot{\epsilon}_v$$

Llevando estas relaciones a la ecuación 15.

$$\sigma = E\epsilon_e + \lambda \dot{\epsilon}_v$$

$$Y \quad \sigma = Ey \frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2} + \lambda y \frac{\partial^2 \dot{y}_k}{\partial x^2} \tag{28}$$

Multiplicando por $y dA$ e integrando como se ve para el modelo Maxwell.

$$\int \sigma y dA = E \frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2} \int y^2 dA + \lambda \frac{\partial^2 \dot{y}_k}{\partial x^2} \int y^2 dA$$

O sea

$$M = EI \frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2} + \lambda I \frac{\partial^2 \dot{y}_k}{\partial x^2} \tag{29}$$

M = Momento interno.

Ecuación diferencial de la elástica de una viga viscoelástica según el modelo de Kelvin.
Integrando 2 veces respecto a x.

Integrando 2 veces respecto a x.

$$EI y_k + \lambda I \dot{y}_k = \iint M dx dx = \iint EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx dx$$

↓
Depende de la carga inicial

$$\therefore EI y_k + \lambda I \dot{y}_k = EI y_i \tag{30}$$

O sea

$$y_k + \frac{\lambda}{E} \frac{dy_k}{dt} = y_i$$

Agrupando:

$$y_i - y_k = \frac{\lambda}{E} \frac{dy_k}{dt}$$

Separando variables:

$$\frac{dy_k}{y_i - y_k} = \frac{E}{\lambda} dt$$

Integrando: $\int \frac{dy_k}{y_i - y_k} = \int \frac{E}{\lambda} dt$

Recordando que: $\int \frac{dx}{a - x} = -\int \frac{dx}{x - a} = \ln(x - a)$

Se obtiene:

$$-\ln(y_i - y_k) = \frac{E}{\lambda} t + \text{constante}$$

Para $t = 0$, la respuesta de la amortiguación es lenta, luego se considera que y :

$y_k = 0$. Luego la constante = $-\ln y_i$, y entonces

$$\frac{E}{\lambda} t - \ln y_i = -\ln(y_i - y_k)$$

$$\frac{E}{\lambda} t = -\ln(y_i - y_k) + \ln y_i = \ln \frac{y_i}{y_i - y_k}$$

Recordando, de nuevo, la definición de \ln .

$$e^{\frac{E}{\lambda} t} = \frac{y_i}{y_i - y_k}$$

$$\therefore (y_i - y_k) e^{\frac{E}{\lambda} t} = y_i$$

Al final para el modelo de Kelvin:

$$y_k = y_i \left(1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t}\right) \quad (31)$$

5-3 EL MODELO DE BURGER

Para el modelo Burger, se tiene entonces.

$$y = y_m + y_k$$

Y al final:

$$y = y_i \left(2 + \frac{E}{\lambda} t + e^{-\frac{E}{\lambda} t} \right) \quad (32)$$

6.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

En el desarrollo de los procesos de análisis, propios de los proyectos de diseño estructural, es preciso recurrir a idealizaciones o modelaciones de los elementos integrantes, para poder utilizar los diversos algoritmos de cálculo que se han desarrollado.

Dichas idealizaciones tratan de simular, de la mejor manera posible, el comportamiento de los elementos.

Es necesario que el usuario de los procedimientos sea muy consciente de las limitaciones propias de las hipótesis asumidas.

También, es preciso disponer, con la mayor aproximación posible, de los parámetros de diseño de los materiales constitutivos de los elementos.

REFERENCIAS.

- [1]. American Concrete Institute. ACI 209.2R-208. “Guide for Modeling and Calculating Shrinkage and Creep in Hardened Concrete”.
- [2]. American Concrete Institute. ACI 209R-92. “Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures”.
- [3]. Kleinlogel A. “Influencias Físico Químicas sobre los Hormigones en Masa y Armados”. Publicaciones Técnicas LABOR.
- [4]. Lenczner D. “Movements in Buildings”. Pergamon Press. Second Edition. 1981.
- [5]. “Manual Técnico Práctico del Hormigón”. “Beton Kalender”. Librería El Ateneo.
- [6]. Schleicher F. “Manual del Ingeniero Constructor”. Editorial Labor. 1960.